

Sobre la labor investigadora en Geometría Integral de Luís A. Santaló y el Proyecto "*Selecta*" de Santaló sobre su obra científica

A. M. Naveira ¹

Universidad de Valencia E. G., España

Conferencia pronunciada por el Dr. A. M. Naveira el 17 de septiembre de 2007 en el transcurso de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, Argentina.

A. Antecedentes históricos

Durante mis años de estudiante de doctorado en la Universidad de Santiago mi amigo y maestro Enrique Vidal Abascal me hablaba a menudo con un gran respeto, cariño y admiración de un matemático español afincado en Argentina: Luís Antonio Santaló Sors. Vidal-Abascal recurría a él con frecuencia para plantearle cuestiones que se le iban presentando al estudiar algunos de sus artículos. En efecto, según él mismo me manifestó en reiteradas ocasiones, a medida que iba estudiando el libro de Bieberbach, [B32], en los años cuarenta, se iba interesando por problemas de la naciente Geometría Integral; en particular, por la Fórmula de Steiner en espacios de curvatura constante, por el estudio de las medidas invariantes en los espacios homogéneos y de los invariantes integrales. En esta dirección, Vidal publica diversos artículos, (por ejemplo, [VA 45, 47, 48]).

Vidal-Abascal había sido compañero de licenciatura en la Universidad de Madrid de un hermano del Profesor Santaló y fue a través de él como se relacionaron científicamente Vidal y Santaló.

Durante las décadas de los años cuarenta y cincuenta del siglo pasado, la influencia en España de la obra de Santaló se extiende también a otros matemáticos, entre los que cabe resaltar Yáñez, E. García Rodeja y J. Sancho de San Román.

Puesto que todo espacio homogéneo define de una manera natural una foliación, en los años sucesivos Vidal-Abascal se dedica al estudio y análisis de las variedades foliadas en general y a la medida de sus hojas, [VA 66, 67a y 67b]. En esta línea, y bajo su dirección, yo mismo presento mi tesis doctoral en Santiago en 1968. En efecto, yo estudié las variedades foliadas con métrica casi-fibrada en el sentido de Reinhart.

¹ e-mail: naveira@uv.es

Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas. Avda. Andrés Estellés, 1. 46100, Burjassot. Valencia, SPAIN.

En 1967 se celebra en Santiago un Congreso Internacional de Geometría Diferencial al cual asiste en calidad de profesor invitado Luís A. Santaló. Tuve el placer y el honor de conocerle personalmente y apreciar su excepcional personalidad, desde el punto de vista humano y no científico, ya que en aquel momento mi formación no me permitía aún comprender y admirar la belleza y riqueza de su conferencia, en la que propuso una definición de las curvaturas totales absolutas de un subconjunto cerrado del espacio euclídeo, [S68b]. Esta definición resultaría clave para una gran parte de su obra, tanto desde el punto de vista de la propia Geometría Integral como de sus aplicaciones a otras especialidades científicas, en particular a la Estereología, especialidad científica a la que me referiré posteriormente.

Con motivo de la jubilación del profesor Vidal-Abascal en 1978 se organiza nuevamente en Santiago un Congreso Internacional de Geometría Diferencial al que también asiste el Profesor Santaló. En esta ocasión sí tuve la oportunidad de discutir con él varias cuestiones matemáticas. Su posterior visita a la Universidad de Valencia, durante este mismo viaje resultó de un excepcional valor didáctico y formativo para muchos jóvenes investigadores en Geometría en aquella universidad. Tuvimos entonces la oportunidad de hablar con él sobre diversos aspectos de las líneas de investigación que estaban de actualidad en la Geometría Diferencial en aquel momento; en particular, sobre algunas de sus líneas de investigación.

A comienzos de los años ochenta del siglo XX, y en colaboración con mi discípulo Salvador Segura Gómis, comienzo a interesarme seriamente por la Geometría Integral al observar que el Problema Isoperimétrico estaba directamente ligado tanto a la Geometría Integral como al Análisis Matemático. Inmediatamente observamos que este problema, tan antiguo e interesante, estaba profundamente ligado a la Geometría Integral. Por ejemplo, una demostración elemental del mismo se puede ver en la primera parte del libro de Santaló sobre Geometría Integral y Probabilidad Geométrica, [S.76].

En noviembre de 1991 Santaló imparte un curso de dos semanas en la Cátedra *Ferrater Mora* de Pensamiento Contemporáneo de la Universidad de Girona. Por indicación suya, varios profesores de universidades españolas y extranjeras fuimos invitados a participar en el mismo. Allí coincidí, entre otros, con Fernando Affentranger y Cruz–Orive. Fue ésta una ocasión única para mí, ya que me permitió entablar con el Profesor Santaló y su familia una relación de amistad que no olvidaré jamás.

A este curso en Girona algunos días me acompañó mi discípulo Gual, quien también estaba interesado en la Geometría Integral. Desde entonces, Gual y Cruz–Orive han publicado diversos artículos en los que, utilizando las técnicas de la Geometría Integral y de la Estereología, obtienen resultados en Tomografía, con interesantes aplicaciones a la Biomedicina.

En agosto de 1997 fui invitado por la Universidad de Buenos Aires a pronunciar una conferencia en el Departamento de Matemáticas de dicha universidad. Aproveché la asistencia a la misma del Profesor Santaló para poner de manifiesto ante una parte de la comunidad matemática argentina la importancia

de su extraordinaria personalidad humana, de su excepcional obra científica, así como su influencia en la obra de numerosos matemáticos españoles y argentinos en los últimos sesenta años.

Revisando la historia del desarrollo de la Geometría Integral, se puede afirmar, sin temor a cometer una equivocación, que el origen de esta especialidad se encuentra en el problema de la aguja de Buffon, planteado a finales del siglo XVIII por el naturalista francés del mismo nombre. Este problema, que en principio parecía un juego o pasatiempo matemático, daría lugar al desarrollo de una teoría matemática con entidad propia. Gracias fundamentalmente a la obra de Poincaré y Blaschke y su escuela. Entre los discípulos más prestigiosos de la escuela de Blaschke cabe señalar a Chern y a Santaló, quienes coinciden durante algún tiempo en Hamburgo. En el primer tercio del siglo XX aparece la Geometría Integral como una especialidad matemática con un contenido propio.

Chern y Santaló utilizan en sus trabajos el método de la referencia móvil de Cartan. Ésta constituiría la herramienta más potente para desarrollar toda su obra matemática. Escritos en este lenguaje, sus trabajos sobre Geometría Integral constituyen la base de esta disciplina hasta nuestros días y son de estudio obligado para todos aquellos interesados por el tema.

Desgraciadamente, al igual que muchos otros científicos españoles, Santaló tuvo que abandonar España debido a la guerra civil. Tras una breve estancia en Francia y con la ayuda de Rey Pastor y Terradas (antiguos profesores suyos en Madrid), se instala en Argentina, país en el que desarrolla casi toda su actividad como docente e investigador. Allí ejerció como profesor en varias universidades, hasta su jubilación como profesor de la universidad de Buenos Aires.

El Profesor Santaló era una persona que estaba siempre interesada por los problemas que le rodeaban. Desarrolló su actividad en varios campos, entre ellos, la investigación en Geometría Diferencial; en particular, en la Geometría Integral y en la Física Teórica. Sentía un gran interés por la Didáctica de las Matemáticas en todos sus niveles, (en particular en las Enseñanzas Secundaria y Universitaria), y su gran deseo era acercar las Matemáticas a la sociedad para hacerlas comprensibles a la comunidad científica en general (lo que le convirtió en un gran divulgador científico). Santaló se preocupó en poner de manifiesto las aplicaciones de las Matemáticas a otras ciencias; en particular, a la Teoría de la Probabilidad Geométrica, a la Estadística y a la Física. Según la relación bibliográfica que aparece en la memoria de Reventós, Santaló escribió más de setenta artículos de divulgación y educación matemática y veinticinco libros, todos ellos de un excepcional valor formativo, didáctico y pedagógico. Además de la enciclopedia sobre Geometría Integral a la que me referiré posteriormente, por su impacto claridad y belleza, yo destacaría [SRP51], [S53, 61b, 61c, 66] y [94].

Fueron múltiples y muy diversas las repercusiones que ha tenido la obra de Santaló, así como las líneas de investigación que se abrieron a la comunidad matemática interesada en la Geometría Integral y en sus aplicaciones. Es

imposible exponer aquí toda la importancia que ha tenido ésta, tanto en su faceta de investigador como de docente o escritor y divulgador. Por lo tanto intentaré exponer aquí algunas de sus aportaciones, refiriéndome para ello sólo a algunas de sus publicaciones más prestigiosas.

Aparte de los artículos que aparecen en la bibliografía y a los que me referiré a continuación, en la Bibliografía Complementaria también se incluye una relación de otros trabajos de matemáticos españoles y argentinos basados en su obra.

B. Un somero análisis de la obra de Santaló

En 1976 publica el excepcional libro "*Geometría Integral y Probabilidad Geométrica*", [S76]. Este se puede considerar una verdadera enciclopedia de la Geometría Integral ya que en él se recogía toda la información bibliográfica existente sobre esta especialidad hasta aquel momento. Esta publicación, que puede ser considerada como una obra maestra sobre Geometría Integral Clásica, y que fue traducida a varios idiomas, va por su segunda edición en inglés.

El libro está dividido en cuatro partes o apartados con contenidos encadenados y al mismo tiempo perfectamente diferenciados y algunas veces autónomos.

B.1. *Geometría integral en el plano*

El Apartado I lo constituyen los primeros ocho Capítulos que forman una unidad adecuada para un excepcional curso de Geometría Integral en el espacio euclídeo de dimensión 2 a nivel elemental. Está basado fundamentalmente en artículos que Santaló había publicado anteriormente, ([S36a, 36b, 40, 53], entre otros). Finaliza con algunas aplicaciones de la Geometría Integral a retículos (mosaicos) en el plano, en las que incluye interesantes ejemplos prácticos.

B.2. *El teorema de Chern - Blascke - Santaló y sus aplicaciones*

La mayor parte de los resultados de Geometría Integral que aparecen en el Apartado I son generalizables tanto a los espacios euclídeos como a los de curvatura constante de cualquier dimensión. Para ello, es necesario utilizar la teoría de las variedades diferenciables, en particular de los grupos de Lie, de los espacios homogéneos y sobre todo el método de la referencia móvil de Cartan. En esta dirección todavía existen interesantes problemas abiertos.

Gran parte de la obra de Santaló sobre Geometría Integral General en espacios euclídeos consistió en considerar ésta desde el punto de vista de los espacios homogéneos; esto es, espacios con un grupo de transformaciones actuando transitivamente sobre ellos y con un subgrupo que mantiene fija una cierta estructura. La medida de conjuntos de objetos geométricos incluidos en tales

espacios la define con la condición de que dicha estructura resulte invariante por el grupo de transformaciones.

En el Apartado II del libro se sientan las bases de la Geometría Integral General, utilizando para ello el Teorema de Blaschke–Chern–Santaló, ((10.3) Cap. 10 de [S76]). A partir de las propiedades de los grupos de Lie y de los espacios homogéneos, se dan las condiciones para que existan medidas invariantes. Basándose en la estructura infinitesimal del grupo de los movimientos euclídeos, se finaliza esta parte con interesantes resultados sobre densidades invariantes de subespacios lineales, [S50a, 54, 67b].

B.3. *La densidad cinemática*

En el Apartado III Santaló recopila algunos resultados de varios artículos suyos sobre la Geometría Integral del espacio euclídeo de dimensión arbitraria y hace una exposición clara y concisa de los principales resultados, (entre otros, utiliza [S52b, 55, 56, 67b, 70 y 75]). Todo este Apartado se dedica a analizar las propiedades de las medidas promediadas (o equivalentemente, las integrales de las curvaturas medias normalizadas) de un subconjunto, así como las relaciones que existen entre ellas, buscando siempre aplicaciones a la Probabilidad Geométrica. Son fundamentales las generalizaciones de las fórmulas de Crofton (que aparecen en los fundamentos de la teoría de la Probabilidad Geométrica, ([G84, p. 135]), la obtención de la fórmula de Steiner y las diversas expresiones que él obtiene para la "*densidad cinemática*". Cabe señalar que Chern también se interesó frecuentemente por problemas relacionados con la densidad cinemática y publicó varios artículos complementarios de los de Santaló, [CH 52, 66]). Por su trascendencia e importancia, estos artículos aparecen también incluidos en el libro de Santaló al que me estoy refiriendo, [S76].

B.4. *Geometría integral no-euclídea*

Los dos primeros Capítulos del Apartado IV están dedicados a la Geometría Integral en espacios de curvatura constante; esto es, a la Geometría Integral en espacios no-euclídeos. Santaló escribió muchos e interesantes artículos en esta dirección, pero quizás el básico haya sido el fascículo de la Comisión Nacional de la Energía Atómica de Buenos Aires, [S52b]. En todos ellos extiende muchas de las propiedades de la Geometría Integral de los espacios euclídeos a los espacios de curvatura constante no nula. En esta dirección cabe señalar la Fórmula de Steiner, sus generalizaciones y propiedades, ([S50b, 63b]), así como las Fórmulas de Cauchy y Kubota, [S42, 43b, 80a, 80b]. Algunos de estos resultados ya fueron extendidos a espacios simétricos, [GAMN]. Santaló define además nuevos conceptos; por ejemplo, para el caso de curvatura negativa, la convexidad por subconjuntos que se comporta como los conjuntos euclídeos, ([S67a, 68a, 69] y [SY72]).

Santaló planteaba a menudo en sus artículos nuevos e interesantes problemas, alguno de los cuales sigue abierto en la actualidad, (por ejemplo, [S63b, p.

137]). El estudio de la Geometría Integral en espacios de curvatura constante ha sido extendido en varias direcciones por un gran número de matemáticos españoles, entre los que se podrían señalar: Vidal-Abascal (Santiago), Naveira y Miquel (Valencia), Reventós, Gallego y Solanes (U. A. Barcelona), Gual y Masó (Castellón) y Tarrío (A Coruña). Muchos de estos matemáticos han publicado con frecuencia trabajos sobre este tema realizados conjuntamente por miembros de un mismo grupo o de grupos diferentes (véase por ejemplo: [GR85], [BM99], [BM02], [BGR01], [GR99], [GS01], [NT97].)

El apartado IV y el libro en sí concluye con algunas consideraciones sobre la Geometría Integral de Foliaciones, la Geometría Integral sobre espacios complejos, la Geometría Integral Simpléctica y la Geometría Integral desde el punto de vista de Gelfand y Helgason.

B.5 La Estereología

Quizás la contribución más importante de Santaló a las ciencias aplicadas haya sido sentar las bases para el nacimiento de una nueva especialidad: *la Estereología*. En efecto, Santaló presenta en [S76. p. 282] el objetivo básico de esta especialidad “*cómo determinar la medida de distribución de partículas convexas distribuidas aleatoriamente en el espacio euclídeo de dimensión tres a partir de la medida de distribución de sus secciones con figuras aleatorias de forma conocida*” (por ejemplo, un cuerpo convexo, un cilindro, un plano, una banda o una línea). En la actualidad la Estereología es una ciencia interdisciplinaria que relaciona materias aparentemente tan dispares como Biología, Ingeniería, Mineralogía, Metalurgia, Biomedicina, Geometría y Estadística.

El Capítulo XVI del libro [S76] está dedicado íntegramente a exponer las bases y algunos métodos de esta especialidad que, como se ha indicado anteriormente, tiene múltiples aplicaciones prácticas. Así, se pueden estimar volúmenes, áreas, longitudes, números de partículas, formas de cuerpos, etc.. Son múltiples las aplicaciones de esta especialidad a otras ciencias; en particular, a la Biomedicina. En esta dirección, en España cabe destacar el trabajo que sobre este tema están realizando actualmente Cruz-Orive de la Universidad de Cantabria y Gual de la Universidad Jaime I de Castellón. De su extensa producción científica en esta línea resaltaría [GA97] y [GACO98, 00].

Me atrevería a afirmar que el “*germen*” de la Estereología se encuentra en [S43a] cuyo título es bien expresivo: “*Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo, deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos*”. Por su parte, Elías, en la década de los años sesenta, propuso la siguiente definición: “*La Estereología trata sobre un conjunto de métodos para la exploración del espacio de dimensión tres cuando sólo son conocidas secciones de dimensión dos por conjuntos sólidos o bien sus proyecciones*”.

B.6 Geometría Integral en los espacios de Riemann

La Geometría Integral en espacios de Riemann de curvatura no constante no puede basarse en el mismo principio con el que se construyó la Geometría Integral de los espacios de curvatura constante ya que, en general, tales espacios no admiten un grupo transitivo de transformaciones que preservan la métrica ni un grupo transitivo de transformaciones que aplica geodésicas en geodésicas. Así, la densidad para un conjunto de geodésicas no puede ser definida por la propiedad de ser invariante bajo un cierto grupo de transformaciones. Sin embargo, como señala Santaló, se puede proceder desde otro punto de vista y definir una medida para conjuntos de geodésicas y conjuntos de puntos la cual, aún no siendo invariante bajo un grupo, tiene propiedades de invariancia que la hacen interesante desde el punto de vista geométrico. Santaló resuelve el problema para las foliaciones de dimensión uno en una variedad de Riemann, definiendo una medida invariante de geodésicas. Aunque la Geometría Integral de Foliaciones está sin estudiar en casi toda su totalidad, hemos de señalar las aportaciones a este tema realizadas por Vidal-Abascal, Hermann y Dedecker, entre otros. Para poner de manifiesto la importancia y trascendencia que han tenido algunos resultados obtenidos por Santaló, se puede citar por ejemplo una fórmula integral suya, ([19, 23], p. 237, S76)], que se refiere a una aplicación de la medida de un conjunto de geodésicas dependiendo de ciertos parámetros. Esta fórmula sigue siendo utilizada por un gran número de matemáticos; entre los que yo destacaría a Croke en la University de Pennsylvania, [CR80, 84a Y 84b].

B.7 Contribución de Santaló a la geometría Integral Compleja

Como señala Santaló, [S76, p. 338 - 344], la Geometría Integral Compleja sobre espacios complejos no ha sido suficientemente desarrollada y merecería un estudio más profundo. En un artículo del año 1952 publicado en Amer. J. Math., [S52a], Santaló define y analiza la densidad cinemática del grupo unitario y determina su volumen. También analiza densidades invariantes de subespacios lineales. En [NG92] y [N93], se han analizado propiedades sobre densidades invariantes de subespacios complejos. Evidentemente, el grupo estructural de la Geometría Integral en el espacio euclídeo complejo es el grupo unitario y una gran cantidad de propiedades de la Geometría Integral Real se puede trasladar sin grandes dificultades al caso complejo. En esta geometría también es posible definir las medidas promediadas; sin embargo, no parece fácil obtener una fórmula del tipo de la de Steiner para dichas medidas. Si fuese posible dar una explicación geométrica natural de las mismas, ésta permitiría, casi con seguridad, desarrollar toda la teoría de la Geometría Integral Compleja.

B.8 La Geometría Integral en la concepción de Gelfand

El término Geometría Integral también fue usado en la bibliografía matemática en un sentido aparentemente diferente del de la escuela de Blaschke – Santaló - Chern. A comienzos del siglo XX, J. Radon, [R17], probó que una función diferenciable sobre el espacio euclídeo de dimensión tres puede determinarse

explícitamente por medio de sus integrales sobre los planos. En torno a esta idea se construye la teoría matemática de la "*Transformada de Radon*", la cual está relacionada con la transformada de Fourier de una función, [H84, p. 99].

La interpretación clásica de los rayos X se puede ver como un intento de reconstruir propiedades de un cuerpo de dimensión tres utilizando para ello la proyección de estos rayos sobre un plano. La interpretación geométrica moderna de la acción de los rayos X y de muchos otros elementos utilizados en la Medicina actual se puede hacer utilizando la transformada de Radon, [C63, 64], [H84]. Aunque los dos conceptos de Geometría Integral (escuelas de Blaschke, Santaló y Chern por una parte y las de Gelfand y Helgason por otra) parecen no estar relacionados, Guillemin, [G84], en una observación al margen, indica que en efecto sí lo están, a través del cálculo de las medidas promediadas. En 1977 se publica en el Bull. Amer. Math. Soc. un artículo excepcional titulado: "*Aspectos matemáticos y prácticos del problema de reconstruir objetos a partir de radiografías*", [SSW77]. En él la matemática utilizada es fundamentalmente la teoría de la Geometría Integral que aparece en [SK78], [Z80] y [H84]. Así, es posible explicar desde un punto de vista matemático todas las actividades médicas de la *Tomografía*. Esta rama del Análisis y de la Geometría experimentó un considerable desarrollo durante los últimos años. Está fundamentada en la obra matemática de Gelfand, [GG59, 69], [GGY66] y Helgason, [H63a, b, c], [H84], entre otros. En el último apartado de su libro Santaló nos invita a profundizar en el estudio de esta nueva técnica y en este momento ésta parece una de las líneas de investigación más interesante en el campo de la Geometría Integral. Durante los últimos años de su vida, y siempre que le era posible, Santaló asistía a todos aquellos congresos que sobre el tema se venían celebrando; en particular, los que patrocinaba la American Mathematical Society.

Santaló también se refiere a la Geometría Integral Simpléctica, [S76, p. 344 – 345], indicando que este tipo de geometría ha sido muy poco estudiada y que merecería un estudio más profundo. En esta dirección, los resultados más recientes se han conseguido en la línea de Gelfand y Helgason.

C. Repercusión científica de la obra de Santaló

C.1 Consideraciones finales sobre la obra de Santaló

Aunque el libro "*Geometría Integral y Probabilidad Geométrica*" recopila una gran parte de la producción matemática del autor hasta la fecha de su publicación, existen algunos artículos muy interesantes cuyo contenido no aparece reflejado explícitamente en el libro. Por ejemplo, en "Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana", [S61a], Santaló retoma un viejo problema de Blaschke en el que se pretendía determinar una figura geométrica convexa a partir de un grupo de desigualdades entre números que debían tener un significado geométrico. Santaló plantea un total de 20 casos, de los que resuelve 6 y dos conjeturas. Éstas han sido probadas por un grupo de investigación de las universidades de Alicante y Murcia del que forman parte, entre otros Segura

Gómis, Hernández Cifre, Salinas y Herrero, entre otros [HCSG00] y [HC00]. En esta dirección existen aún una gran cantidad de problemas abiertos.

La producción científica de Santaló continuó todavía durante los años posteriores a su jubilación con la publicación de varios artículos de gran impacto, por ejemplo, [S88], si bien cabe señalar que se dedicó con más intensidad a los problemas sobre la Didáctica de las Matemáticas, y a impartir un gran número de cursos y conferencias. Cuando en noviembre de 1991 impartió un curso en Girona, los allí presentes, y que nos considerábamos sus discípulos, le animamos a que preparase una publicación con el contenido del mismo. Este excepcional ensayo sobre *"La matemática: una filosofía y una ciencia"*, [S94], fue publicado en 1994.

A vista de pájaro, he intentado poner de manifiesto los aspectos que considero más sobresalientes en la obra del Profesor Santaló. Al analizarla, se destacan algunas características fundamentales; a saber, su gran poder de abstracción, una brillantísima intuición geométrica, y una sorprendente claridad expositiva. No es nada extraño, pues, que su obra haya tenido hondas repercusiones en la comunidad científica y en la sociedad. Se puede afirmar con absoluta seguridad que, hombres como Santaló, serán siempre necesarios para el desarrollo de las Matemáticas, de sus aplicaciones y de su divulgación. Por las excepcionales y profundas contribuciones que el profesor Santaló ha hecho a la comunidad matemática y a la sociedad, deseo expresarle mi más profunda gratitud, respecto, cariño y admiración. A propuesta mía, en 1999, ha sido propuesto como Socio de Honor de la Real Sociedad Matemática Española, entidad de la que en aquel momento yo era Presidente.

C.2 Importancia internacional de la obra de Santaló

Resultaría muy extenso hacer un resumen de la importancia y repercusión de la obra de Santaló en la comunidad científica internacional. Sólo mencionaremos que sus resultados han sido aplicados tanto a la Geometría Integral como a otras líneas de investigación por matemáticos de Estados Unidos (Croke en Pensylvania, Howard en Carolina del Sur, Elías en Chicago, Chern en Berkeley), Francia (Langevin en Dijon, Gorse en París y Alvarez-Paiva en Nancy), Alemania (Sulanke en Berlín, Teufel en Stuttgart, Weyl en Karlsruhe y Schneider en Friburgo), Rumania (Stoka), China (Ren De Lin), en Argentina todos sus discípulos, etc.

También quisiera destacar la labor conjunta que él ha desarrollado con los geómetras hispano-argentinos Balanzat y Yáñez. Algunos de los artículos de esta cooperación resultaron fundamentales para posteriores investigaciones por parte de algunos miembros de los Departamentos de Matemáticas de las universidades de Valencia y Autónoma de Barcelona, entre otros.

Su libro-enciclopedia, [S76], ha sido traducido al ruso y es de uso obligado en todos los cursos de doctorado y máster específicos referidos a la Geometría Integral.

C.3 Algunas notas sobre la relación de Santaló con la matemática española

Pese al aislamiento científico que vivió la ciencia matemática española en las décadas centrales del siglo XX, el profesor Santaló siempre mantuvo una interesante relación científica con algunos compañeros españoles durante esos años. En particular, cabe destacar sus contactos con Vidal-Abascal y García-Rodeja (Santiago) y Sancho de San Román (Zaragoza). A partir de la década de los años setenta, jóvenes matemáticos españoles comienzan a estudiar su obra y a escribir interesantes artículos de investigación. Así, cabe destacar diversas publicaciones de Tarrío (La Coruña), Gual (Castellón), Segura, Salinas y Pastor (Alicante) Hernández-Cifre (Murcia), Reventós, Gallego y Solanes (Barcelona), Cruz-Orive (Santander) y Naveira (Valencia).

C.4 Algunas notas sobre la relación de Santaló con la matemática argentina

No tuve la oportunidad de estudiar y conocer a fondo la trayectoria científica de los discípulos del Profesor Santaló aquí en Argentina. Según mis averiguaciones, en Argentina Santaló dirigió doce tesis doctorales en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires: Varela (1952), Ayub (1955), Luccioni (1963), Conton (1973), Noriega (1976), Keilhauer (1980), Berman (1980), Gutiérrez (1985), Molter (1985), Gysin (1987), Affentranger (1988) y Berenice (1988), todas ellas en el área de Geometría y especialmente en Geometría Integral.

La Dra. Birman, como especialista en la obra científica del Profesor Santaló, figura en nuestro Comité Editorial de la "Selecta". Al Dr. Affentranger le encontré en 1994 y tuve la oportunidad de mantener con él interesantes discusiones científicas.

D. Una consideración de aspecto docente

La primera parte de [S76], considerada por muchos de nosotros como su obra más importante, es asequible a los alumnos universitarios de primer ciclo. Sin embargo, para estudiar la segunda se requiere un conocimiento básico de la teoría de Variedades Diferenciables y Grupos de Lie. El Profesor Santaló hace un somero análisis de estas materias en los Capítulos 9 y 10 de su libro. La razón es que toda la Geometría Integral en el sentido de Blascke, Chern y Santaló está fundamentada en el análisis de las propiedades invariantes bajo las acciones de grupos que actúan sobre espacios homogéneos. Por la bibliografía especializada, es bien sabido que a todo espacio homogéneo se le puede dotar de una estructura de variedad diferenciable. Personalmente considero que todo estudiante interesado en el estudio de la Geometría Integral debería poder tener la posibilidad de seguir un mini-curso sobre "*Teoría general de Grupos de Lie con aplicaciones a los Espacios Homogéneos y a la Geometría Integral*". El nivel sería a caballo entre el último año de la licenciatura en Ciencias Matemáticas y el primero de Doctorado. En el mismo se debe procurar mostrar a los alumnos la interrelación de la Geometría de

Riemann con la de los Grupos de Lie, poniendo de manifiesto las aplicaciones a los Espacios Homogéneos en general pero, en particular, a la Estereología. En esta línea considero básica la interesante conferencia de Santaló sobre este tema publicada en la Real Academia de Ciencias de Madrid, institución de la que fue *académico correspondiente*.

E. Edición de la “Selecta” sobre la obra del Profesor L. A. Santaló

E.1 Antecedentes

Sin temor a equivocarnos, podemos afirmar que el Profesor Santaló constituye uno de los matemáticos hispano-argentinos de mayor calidad científica y reconocimiento internacional del siglo XX. Aunó en su persona las dos facetas fundamentales de un buen profesor: la excelencia investigadora, fundamentalmente en el campo de las Geometrías Diferencial e Integral, y la preocupación e interés por la docencia y la educación matemática. Se preocupó especialmente por la mejora de la formación científico-didáctica de los profesores de las enseñanzas tanto a nivel primario como secundario.

En reconocimiento de toda su labor tanto en el aspecto científico como docente fue distinguido con varios galardones de reconocido prestigio internacional; entre otros, con el premio *Príncipe de Asturias* de Investigación Científica y Técnica en 1977. También, como premio a su excepcional valía científica y humana, la Universitat de Valencia (E.G.), le concede su medalla.

Teniendo en cuenta que una gran parte de su producción científica está agotada y otra es de una difícil localización, a un grupo de compañeros españoles y argentinos nos pareció de sumo interés llevar a cabo el proyecto de publicar lo más importante de su producción científica. Así, en colaboración con los profesores Reventós, de la Universidad Autónoma de Barcelona, Gual, de la Universidad Jaime I de Castellón y Birman, de la Universidad Nacional del Centro de Buenos Aires, estamos llevando a cabo proyecto de publicar una “*Selecta*” de su obra científica en la Editorial Springer-Verlag. Consideramos que se trata de una labor científica de gran interés, tanto para las comunidades matemáticas española y argentina como para la internacional, ya que muchas de sus obras están publicadas en revistas y monografías de difusión reducida y a veces son difíciles de localizar.

Analizando su dilatado currículum académico, se observa que publicó aproximadamente 200 artículos científicos, de los que la casi totalidad aparecen recensionados en el Math. Sci. y en Zentr. Für Math. Escribió 24 libros de los que 11 son relativos a su especialidad y los restantes son monografías, muy interesantes, pero de limitada difusión a nivel internacional. También, a lo largo de su carrera científica asistió a más de treinta congresos de su especialidad.

Según cualificados especialistas en el área de la Geometría Diferencial, a Santaló, junto con Blaschke, Chern y Hadwiger, se le puede considerar como una de las máximas autoridades mundiales del siglo XX en el campo de la Geometría. Su obra "*Integral Geometry and Geometric Probability*" publicada en "*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*", [S76], que fue reeditado en 2004, es de estudio obligado en todas las universidades y centros de investigación en los que existan grupos interesados en la Geometría Integral y en sus aplicaciones prácticas. Como se ha señalado anteriormente, sus investigaciones teóricas en Geometría Integral han permitido a Elías (en representación de un grupo de científicos interesados en el tema) en la década de los años sesenta del siglo pasado) sentar las bases de una nueva ciencia aplicada con interesantes aplicaciones tanto a la Biomedicina como a la Mineralogía: *la Estereología*. Ésta es una parte de la Matemática Aplicada que estudia propiedades cuantitativas de un cuerpo a partir de secciones planas que se le practican, a partir de proyecciones sobre el plano; esto tiene gran relación con la Tomografía Axial Computerizada (el TAC), que es un método de exploración médica muy usado y muy eficaz en la actualidad.

A lo largo de nuestra, (en algunos casos ya dilatada,) vida académica los integrantes del Comité editorial de este proyecto tuvimos la oportunidad y el inmenso privilegio de gozar de la amistad personal del insigne científico y matemático hispano-argentino Luís A. Santaló. A medida que analizábamos su obra científica, la íbamos encontrando más interesante, tanto por sí misma como por sus aplicaciones a otras ciencias; en especial a la Biomedicina, (vía la Estereología).

En 1991 y durante dos semanas, con ocasión de la celebración de un interesante seminario que él estaba dirigiendo en la Cátedra "*Ferrater Mora*" de la Universidad de Girona, tuve la oportunidad de compartir con él seminarios y conversaciones personales que jamás olvidaré. Fue ésta una ocasión única para poder conocer su inmensa humanidad, su trato afable y cordial, su deseo de ayudar a los matemáticos (en particular a los argentinos y españoles) y su aspecto humano y trato afable y siempre desinteresado. Como ya dije anteriormente, la última vez que tuve el honor de gozar de su presencia fue con motivo de una invitación en la Universidad de Buenos Aires en septiembre de 1997, durante la cual pronuncié una conferencia que versó sobre "La relación de la obra de Santaló con la de algunos matemáticos españoles".

Durante el curso de Girona, al que ya me referí anteriormente, Santaló también tuvo la oportunidad de conocer al, entonces un joven investigador, Gual quien, como también se indicó anteriormente, en la actualidad desempeña una interesante labor científica en la Universidad de Castellón, aplicando las técnicas de Santaló a la Estereología. De hecho ha recibido algún premio importante por sus trabajos en esta dirección y actualmente forma parte de un grupo de investigación en colaboración con el Hospital "*La Fe*" de Valencia.

Reventós, de la Universidad Autónoma de Barcelona, viene interesándose desde hace varias décadas por el estudio y análisis de la Geometría Integral, siguiendo fundamentalmente las ideas de la obra de Santaló.

G. Birman, que desarrolla su actividad científica en la Universidad Nacional del Centro de Buenos Aires, fue una estudiante de Santaló en la Universidad de Buenos Aires y, posteriormente, realizó bajo su dirección su tesis doctoral. Posteriormente, y continuando en parte con las líneas de investigación de la Geometría Integral, realiza una parte de su actividad investigadora bajo la supervisión y en colaboración con Nomizu, de la Brown University.

Como se puede ver en el currículum de todos los componentes del Comité Editorial del Proyecto “*Selecta*” de Santaló, todos sus componentes dirigieron varias tesis doctorales y publicaron algunos artículos de investigación siguiendo sus ideas. Además, muchos de sus discípulos están siguiendo esta misma línea de investigación. Por ejemplo, S. Segura en la Universidad de Alicante, Tarrío en la Universidad de A Coruña, Gual en la de Castellón, Gallego y Solanes en la Autónoma de Barcelona, etc..

Desde hace varios años todos los componentes del equipo venimos manteniendo una cordial relación personal con la familia del Profesor Santaló;. Cuando fue propuesta a la familia la idea de la realización de este proyecto, ésta nos dio toda clase de facilidades para poder analizar en su casa de Buenos Aires toda su obra publicada o pendiente de publicación

E.2 *Interés del proyecto “ Selecta” sobre la labor científica de Santaló*

Los integrantes de este Comité Editorial consideramos que este proyecto es de un gran interés científico para la comunidad matemática tanto nacional como internacional. Sería una forma de poder poner en circulación y de una manera muy asequible la parte de la producción del profesor Santaló que, nuestros asesores y nosotros, consideramos más importante. En especial, se considera que este trabajo es del sumo interés para los jóvenes investigadores ya que existen en la obra de Santaló muchos problemas abiertos e interesantes líneas de investigación todavía abiertas a la comunidad científica interesada. En esta dirección, y siempre que ello sea posible, es nuestra intención añadir a cada artículo seleccionado para la “*Selecta*” un “*comentario*” realizado por un especialista, analizando aquellos aspectos científicos que se consideren más relevantes en la obra publicada, problemas abiertos, líneas a seguir, etc. Estos comentarios serían realizados bajo la propia responsabilidad de los especialistas que analicen cada artículo (o grupo de artículos) que aparecerán en la “*Selecta*”. Este es un método de trabajo que la editorial Springer-Verlag ya viene aplicando en las publicaciones de sus últimas “*Selecta*”. En este momento tenemos seleccionados 53 artículos de aproximadamente 700 páginas en total.

Para poder poner de manifiesto el interés que este proyecto ha suscitado en las comunidades matemáticas española y argentina disponemos de la ayuda moral de varias instituciones científicas de una valía excepcional. Entre ellas, cabe destacar el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires, la Real Sociedad Matemática Española, la Real Academia de Ciencias de

Madrid, el Centro de Investigaciones Matemáticas de Barcelona, la Sociedad Argentina de Matemáticas y la Sociedad Catalana de Matemáticas.

Estando dirigida la publicación de la “*Selecta*” a un público casi exclusivamente especializado en la investigación en el área de la Geometría Integral y en sus aplicaciones, en colaboración con el Director de la “Cátedra Santaló”, de la Universidad de Girona, nos ha parecido interesante que ésta publique simultáneamente un volumen en el que aparezcan expuestos los aspectos humano, didáctico, divulgador y comunicador del profesor Santaló. Esta labor va a ser realizada por su director, el Profesor Barceló.

E.3 *Contenido de la “Selecta”*

Es intención del Comité Editorial encargado de llevar a cabo este proyecto hacer la edición de aquellos artículos de investigación del Profesor Santaló que ya están preseleccionados para la “*Selecta*”. Como se ha indicado, sus discursos, conferencias, artículos de divulgación, etc., irán incluidos en parte en la obra de Barceló. El material restante podría quedar pendiente para un estudio y análisis posterior.

Es intención del Comité Ejecutivo que su contenido sea el siguiente:

- a) Un prólogo del Comité Editorial
- b) Un prefacio a cargo de una insigne autoridad científica en el área de la Geometría Diferencial.
- c) Una pequeña colección de fotos del Profesor Santaló y sus entornos familiar y científico
- d) Una Biografía del Profesor Santaló con una relación de todas sus publicaciones
- e) Un capítulo sobre Geometría Integral
- f) Un capítulo sobre Geometría Diferencial
- g) Un capítulo sobre Geometría Diferencial e Integral Afín
- h) Un capítulo sobre las aplicaciones de la Geometría Integral a la Estereología
- i) Otros comentarios que se consideren importantes sobre la obra de Santaló

Cada uno de los contenidos de los Capítulos de los apartados e), f), g) y h) irán precedidos de una Introducción de un máximo de 20 páginas cada una.

Tanto la biografía como las introducciones a los apartados indicados anteriormente serán de responsabilidad única del Comité Editorial.

E.4 *Posible difusión de la publicación de la obra de Santaló*

Al analizar la posible difusión de la publicación de este trabajo se debe tener en cuenta que se está trabajando en una ciencia pura y que sus publicaciones son de menor tirada que en otras especialidades de ciencias aplicadas. Según

datos estimativos a los que han llegado los miembros del Comité Editorial, cabría esperar:

- a) La posible difusión de la *Selecta*, que está dirigida fundamentalmente a investigadores, podría oscilar acerca del millar y medio de ejemplares, los cuales serían adquiridos en su mayoría por las mejores bibliotecas especializadas de todo el mundo. Un número razonable de ejemplares sería adquirido también por investigadores a nivel particulares. También está previsto que la edición de la *Selecta* sea mayoritariamente en Inglés; sin embargo, habrá algunos artículos reproducidos en Español (en particular, su tesis doctoral).
- b) También esperamos que la publicación de algunas conferencias, seminarios correspondencia científica (evidentemente, publicada con la debida autorización de la familia), etc. por parte de la *Cátedra Lluís A. Santaló de Aplicaciones de la Matemática* de la Universidad de Girona tenga un gran interés para todas las bibliotecas de Ibero-América y también en los Centros de Enseñanza Secundaria; así como para muchos matemáticos a título individual. Teniendo en cuenta la elegancia, contenido y concisión de estos escritos, éstos interesarían a científicos de muchas áreas, no sólo a los especialistas en el área de la Geometría Integral.

F. BIBLIOGRAFÍA

F.1. Bibliografía básica

- [B32] Bieberbach, L. *Differentialgeometrie*. B. G. Teubner, Leipzig - Berlín, (1932).
- [BL55] Blaschke, W. *Vorlesungen ueber integralgeometrie*, Deutsch. Verlag Wiss, Berlín, (1955).
- [BM99] Borisenko, A. A. & Miquel V. *Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space*, Illinois J. Math. **43** (1999), 61 – 78.
- [BM02] Borisenko, A. A. & Miquel, V. *Comparison Theorems on Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. 20 (2000), (Aceptado).
- [BGR01] Borisenko, A. A. , Gallego, E. & Reventós, A. *Relation between area and volume for λ - convex sets in Hadamard manifold*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), 267 – 280.
- [CH52] Chern, S. S. *On the kinematic formula in the Euclidean space of n dimensions*, Amer. J. Math. **74** (1952), 227 – 236.
- [CH66] Chern, S. S. *On the kinematic formula in integral geometry*, J. Math and Mech. **16** (1966), 101 – 118.
- [CHL57] Chern, S. S. & Lashof, R. K. *On the total curvature of immersed manifolds, I*. Amer. J. Math. **79** (1957), 306 – 318.

- [CHL58] Chern, S. S. & Lashof, R. K. *On the total curvature of immersed manifolds, II.* Michigan Math. J. **5** (1958), 5 – 12.
- [C63] Cormack, A. M. *Representation of a function by its line with some radiological application*, I. J. Apl. Phys. **34** (1963), 2722 – 2727.
- [C64] Cormack, A. M. *Representation of a function by its line with some radiological application*, I. J. Apl. Phys. **35** (1964), 2908 – 2912.
- [CR80] Croke, C. B. *Some isoperimetric inequalities and eigenvalues estimates*, Ann. Sci. École . Norm. Sup. **13** (1980), 419 – 435.
- [CR84a] Croke, C. B. *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 187 – 192.
- [CR84b] Croke, C. B. *Curvature free volume estimates*, Invent. Math. **76** (1984), 515 – 521.
- [GNS03] Gallego, E.; Naveira, A. M. & Solanes, G. *Horospheres and convex bodies in n -dimensional hyperbolic space*. Geom. Dedicata **103** (2004), 103–114.
- [GR85] Gallego, E. & Reventós, A. *Asymtotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane*, J. Differential Geom. **21** (1985), 63-72.
- [GR99] Gallego, E. & Reventós, A. *Asymptotic behavior of λ - convex sets in the hyperbolic plane*, Geom. Dedicata **76** (1999), 275 – 289.
- [GS01] Gallego, E. & Solanes, G. *Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane*, J. London Math. Soc. **64** (2001), 161 - 178,
- [GG59] Gelfand, I. M. & Graev, M. I. *The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry related to them, 1*, Trans. Moscow Math. Soc. **8** (1959), 321 – 390.
- [GGY66] Gelfand, I. M., Graev, M. I. & Vilenkin, N. Ya. *Generalized Functions, V. 5: Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press, N. Y., (1966).
- [GG69] Gelfand, I. M. , Graev, M. I. & Shapiro, Z. Ya. *Differential forms and integral geometry*, Functional. Anal. Appl. **3** (1969), 101 - 114 (translation).
- [GA97] Gual-Arnau, X. *On the definition of total absolute curvatures in integral geometry*, Acta Math, Hungar. **76** (1997), 249 – 256.
- [GAMN] Gual-Arnau, X. , Masó, R. & Naveira A. M. *Variational properties of the Integrated Mean Curvatures of Tubes in Symmetric Spaces*, Chinese Ann. Math. Ser. B. **23**, (2002), 53-62.
- [GAN95] Gual-Arnau X. & Naveira A. M. *Total curvatures of compact complex submanifolds in CP^n* , Ann. Global Anal. Geom. **13** (1995), 9 – 18.
- [GA97] Gual-Arnau, X. *Stereological implications of the geometry of cones*, Biom. J. **39** (1997), 627 – 635.
- [GACO98] Gual-Arnau, X. & Cruz-Orive, L. *Variance prediction under systematic sampling with geometric proves*, Adv. in Appl. Probab. (Section: Stoch. Geom.) **30** (1998), 889 – 903.
- [GACO00] Gual-Arnau, X. & Cruz-Orive, L. *Systematical sampling on the circle and on the sphere*, Adv. in Appl. Probab. (Section: Stoch. Geom.) **32** (2000), 628 – 647.

- [G84] Guillemin, V. *Perspectives in integral geometry*, Contemp. Math. **63** (1984), 135 – 150.
- [H63a] Helgason, S. *Duality and Radon transform for symmetric spaces*, Amer. J. Math. **85** (1963), 887 - 692.
- [H63b] Helgason, S. *A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **70** (1964), 435 – 446.
- [H63c] Helgason, S. *The Radon transform on euclidean spaces, compact two point homogeneous spaces and Grassmann manifolds*, Acta Math. **113** (1965), 153 – 180.
- [H84] Helgason, S. *Groups and Geometrical Analysis: Integral geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Academic Press, N. Y., (1984).
- [HCSG00] Hernández Cifre, M. A. & Segura Gomis, S. *The Missing Boundaries of the Santaló diagrams for the cases (d, w, R) and (w, R, r)* , Discrete. Comput. Geom. **23** (2000), 381-388.
- [HC00] Hernández Cifre, M. A. *Is there a planar convex set with given width, diameter and inradius?*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), 893 – 900.
- [NG92] Naveira, A. M. & García, F. *Some results of integral geometry for density of linear subspaces of $\mathbb{C}^n$* , Rend. Math. Appl. **12** (1992), 921 – 935.
- [N93] Naveira, A. M. *Some remarks about integral geometry in the complex space $\mathbb{C}^n$* , Rend. Math. Appl. **13** (1993), 331 – 346.
- [N01] Naveira, A. M. *Sobre la labor investigadora en Geometría Integral de Luís Antonio Santaló Sors*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **95** (2001), 177-186.
- [N02] Naveira, A. M. *He Riemann curvature through history*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **99** (2005), 195-210.
- [NT97] Naveira, A. M. & Tarrío, A. *Two problems on h -convex sets in the hyperbolic space*, Arch. Math. (Basel) **68** (1997), 514 – 519.
- [R17] Radon, J. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ver. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Nat. **69** (1917), 262 – 277.
- [RE02] Reventós, A. *Lluís Antoni Santaló i Sors*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. (2002).
- [S36a] Santaló, L. A. *Geometría Integral 4: Sobre la medida cinemática en el plano*, Hamburg Abhandlungen **11** (1936), 222 – 236.
- [S36b] Santaló L. A. *Integral Geometrie 7: Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp) **33** (1936), 3 – 50.
- [S40] Santaló, L. A. *Sur quelques problèmes de probabilités géométrique*, Tohoku Math. J. **47** (1940), 159 – 171.
- [S42] Santaló, L. A. *Integral Formulas in Crofton's Style on the Sphere and some Inequalities Referring to Spherical Curves*, Duke Math. J. **9** (1942), 707 – 722.

- [S43a] Santaló, L. A. *Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo deducida de la distribución en sus secciones*, Rev. Un. Mat. Argentina **9** (1943), 145 – 164.
- [S43b] Santaló, L. A. *Integral geometry on surfaces of constant negative curvature*, Duke Math. J. **10** (1943), 687 – 704.
- [S46] Santaló, L. A. *Historia de la Aeronáutica*, Espasa-Calpe, Argentina, (1946).
- [S50a] Santaló, L. A. *Geometry on Projective and Affine Spaces*, Ann. of Math. **51** (1950), 739 – 755.
- [S50b] Santaló, L. A. *On Parallel Hypersurfaces in the Elliptic and Hyperbolic n - Dimensional Space*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 325 – 330.
- [S52a] Santaló, L. A. *Integral Geometry in Hermitian Spaces*, Amer. J. Math. **74** (1952), 423 – 434.
- [S52b] Santaló, L. A. *Geometría Integral en espacios de curvatura constante*, Publ. de la Comisión Nacional de Energía Atómica (Buenos Aires), Serie Matemática **1** (1952), 1 – 68.
- [S53] Santaló, L. A. *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, París, (1953).
- [S54] Santaló, L. A. *On the Kinematic Formula in Spaces of Constant Curvature*, Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, V. **2** (1957), 251 – 252.
- [S55] Santaló, L. A. *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*, Colloq. sur les questions de réalité en géométrie, Liège, 1955. Masson, París (1956), 177 – 190.
- [S56] Santaló, L. A. *On the mean curvatures of a Flattened Convex Body*, Revue du AFC. des Sciences, Univ. Estambul **21** (1956), 189 – 194.
- [S61a] Santaló, L. A. *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa plana*, Math. Notae **17** (1961), 82 – 104.
- [S61b] Santaló, L. A. *Vectores y tensores*, Eudeba, Buenos Aires, (1961).
- [S61c] Santaló, L. A. *Geometrías no euclidianas*, Eudeba, Buenos Aires, (1961).
- [SGB] Santaló, L. A. *On the Gauss- Bonnet Formula for polyhedra*, Rev. Un. Mat. Argentina, **20** (1962), 79-94.
- [S63a] Santaló, L. A. *Sobre la fórmula fundamental cinemática de la Geometría Integral en espacios de curvatura constante*, Math. Notae **18** (1963), 79 – 94.
- [S63b] Santaló, L. A. *Una relación entre las curvaturas medias de cuerpos convexos paralelos en espacios de curvatura constante*, Rev. Un. Mat. Argentina **21** (1963), 121 – 137.
- [S66] Santaló, L. A. *Geometría proyectiva*, Eudeba, Buenos Aires, (1966).
- [S67a] Santaló, L. A. *Horocycles and Convex Sets in the Hyperbolic Plan*, Arch. Math. (Basel) **28** (1967), 83 – 89.
- [S67b] Santaló, L. A. *Integral Geometry*, Studies in Global Analysis and Geometry, Ed. S. S. Chern, Math. Assoc. Amer., Washington, D. C. (1967).

- [S68a] Santaló, L. A. *Horospheres and Convex Bodies in Hyperbolic Space*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 390 – 395.
- [S68b] Santaló, L. A. *Curvaturas absolutas totales de variedades contenidas en un espacio euclidiano*, Acta Científica Compostelana **5** (1968), 140 – 158.
- [S69] Santaló, L. A. *Convexidad en el plano hiperbólico*, Rev. Mat. Fís. Teórica Univ. Tucumán **19** (1969), 174 – 183.
- [S70] Santaló, L. A. *Mean values and curvatures*, Izv. Akad. Nauk. Armejan, SSR, Ser. Math. **5** (1970), 286 – 295.
- [S74] Santaló, L. A. *Total curvatures of Compact Manifolds immersed in Euclidean Space*, Inst. Naz. di Alta Matematica, Roma, Academic Press **14** (1974), 363 – 390.
- [S75] Santaló, L. A. *The Kinematic Formula in Integral Geometry for Cilinders*, Ann. Mat. Pura Appl. **103** (1975), 71 – 79.
- [S76] Santaló, L. A. *Integral Geometry and Geometric Probability*, Enc. of Mathematics and its Appl., Mass., Addison-Wesley, Reading, (1976).
- [S80a] Santaló, L. A. *Cauchy and Kubota Formulas for Convex Bodies in Elliptic n -Space*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **38** (1980), 51 – 58.
- [S80b] Santaló, L. A. *Notes on the Integral Geometry in the Hyperbolic Plane*, Portugal. Math. **39** (1980), 239 – 249.
- [S80c] Santaló, L. A. *Probabilidades geométricas, geometría integral y geometría estocástica: Aplicaciones*, Anal. Acad. Nac. Cienc. Ex. Fis. Nat., Buenos Aires **32** (1980), 65 – 93.
- [S88] Santaló, L. A. *Affine Integral Geometry and Convex Bodies*, J. of Microsc. **152** (1988), 229 – 233.
- [S94] Santaló, L. A. *La Matemática: Una filosofía y una técnica*, Ariel, Barcelona, (1994).
- [SRP51] Santaló, L. A. y Rey Pastor J. *Geometría Integral*, Espasa-Calpe, Argentina, (1951).
- [SY72] Santaló, L. A. and Yáñez I. *Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes*, J. Appl. Probab. **9** (1972), 140 – 157.
- [SK78] Sherpp, K. T. and Kruskal, J. B. *Computerized Tomography: the new Medical X-ray Technology*, Amer. Math. Montly **85** (1978), 420 – 439.
- [SSW77] Smith, K. T. Solmon D. C. and Wagner S. L. *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 1227 – 1270.
- [VA45] Vidal-Abascal, E. *On a theorem of Liouville and generalization of Steiner's formulas*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. **6** (1946), 254 – 259.
- [VA47] Vidal Abascal, E *A generalization of Steiner's formulae*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 841 – 844.
- [VA48] Vidal Abascal E. *Curvas paralelas sobre superficies de curvatura constante*, Rev. Un. Mat. Argentina **13** (1948), 135 – 138.

- [VA59] Vidal-Abascal E. *A generalization of integral invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 721 – 727.
- [VA66] Vidal-Abascal, E. *Mesures définies sur les espaces des feuilles d'un feuilletage*, Rend. Circ. Math. Palermo **15** (1966), 247 – 256.
- [VA67a] Vidal-Abascal, E. *On regular foliations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967), 129 – 133.
- [VA67b] Vidal-Abascal, E. *Cuestiones en relación con las medidas en espacios foliados*, Acta 2º. Coloquio de Geometría Diferencial. Santiago de Compostela (1967), 59 – 63.
- [Z80] Zalcman L. *Offbeat Integral Geometry*, Amer. Math. Montly **87** (1980), 161 – 175.

F.2 Anexo.

Relación de algunos artículos de matemáticos españoles y argentinos basados en la obra de L. A. Santaló

- [A88a] Affentranger, F. *Pairs of nonintersecting random flats*, Probab. Theory Related Fields **79** (1988), 47 – 49.
- [A88b] Affentranger, F. *Remarks on the note: "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points"*, Elem. Math. **43** (1988), 151 – 152.
- [A88c] Affentranger, F. *Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points*, Elem. Math. **43** (1988), 39 – 45.
- [A89] Affentranger, F. *Random circles in the d-dimensional unit ball*, J. Appl. Probab. **26** (1989), 408 – 412.
- [A90] Affentranger, F. *Random spheres in a convex body*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), 74 – 81.
- [A92] Affentranger, F. *Random approximation of convex bodies*, Publ. Mat. **36** (1992), 85 – 109.
- [A93] Affentranger, F. *The convex hull of random points with spherically symmetric distributions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **49** (1993), 359 – 383.
- [AD93] Affentranger, F. & Dwyer, R. A. *The convex hull of random balls*, Adv. in Appl. Probab. **25** (1993), 373 – 394.
- [AS92] Affentranger, F. & Schneider, R. *Random projections of regular simplices*, Discrete Comput. Geom. **7** (1992), 219 – 226.
- [AW91] Affentranger, F. and Wieacker, J. A. *On the convex hull of uniform random points in a simple d-polytope*, Discrete Comput. Geom., **6** (1991), 291 - 305.
- [Bn88] Birman, G. S. *Density of pairs of elements in L^2 and L^3* , (Spanish), Elem. Math. **43** (1988), 46-50.
- [Bn81/82] Birman, G. S. *Density of pairs of elements in CP^3* , (Spanish), Rev. In. Mat. Argentina **30** (19881/82), 102-109.

- [Bn82/83] Birman, G. S. *Density and total measure of normal chains in Hermitian spaces*, (Spanish), Rev. In. Mat. Argentina **30** (19881/82), 141-146.
- [Bn84.1] Birman, G. S. *The Gauss-Bonnet Theorem for 2-dimensuional space times*, Michigan Math. J. **31** (1984), 77-81.
- [Bn84.2] Birman, G. S. *Crofton's and Poincaré formulas in the Lorentzian plane*, Geom. Dedicata **15** (1984), 399-411.
- [Bn89] Birman, G. S. *A Santaló's formula in L-P*, Hokkaido Math. J. **18** (1989), 31-43.
- [Bn89] Birman, G. S. *A Support functions and integral formulas in the Lorentzian plane*, J. Geom. **72** (1989), 11-17.
- [BCO95] Baddley, A. J. & Cruz-Orive, L. M. *The Rao Blackwell theorem in stereology and some counterexamples*, Adv. in Appl. Probab. **27** (1995), 2 – 19.
- [BHCS] Böröczki, K. Hernández Cifre, M. A. & Salinas, G. *Optimizing the perimeter and the area of convex sets for prescribed circumradius and inradius*, aceptado para su publicación en Monatshefte für Math.
- [CO79] Cruz-Orive, L. M. *Distortion of certain Voronoi tessellations when one particle moves*, J. Appl. Probab. **16** (1979), 95 – 103.
- [CO80] Cruz-Orive, L. M. *Best linear unbiased estimators for stereology*, Biometrics **36** (1980), 595 – 605.
- [CO82] Cruz-Orive, L. M. *The use of quadrats and test systems in stereology, including magnification corrections*, J. Microsc. **125** (1982), 89 – 102.
- [CO83] Cruz-Orive, L. M. *Distribution free estimation of sphere size distributions from slabs showing overprojection and truncation, with a review of previos methods*, J. Microsc. **131** (1983), 265 – 290.
- [CO85] Cruz-Orive L. M. *Estimating volumes from systematic hyperplane sections*, J. Appl. Probab. **22** (1985), 47 – 49.
- [CO87] Cruz-Orive, L. M. *Stereology: recent solutions to old problems and a glimpse into the future*, Proc. ICS VII Caen, Acta Stereologica **6/III** (1987)/ 3 , 3 - 18.5.
- [CO89] Cruz-Orive, L. M. *Precision of systematic sampling on a step functions*, Geobild'89. Math. Res., 51, Akademie-Verlag, Berlín, (1989).
- [COH91] Cruz-Orive, L. M. & Howard, C. V. *Estimating the lenghth of a bounded curve in three dimensions using total vertical projections*, J. Microsc. **163** (1991), 101 – 113.
- [CO97] Cruz-Orive, L. M. *Stereology of single objects*, J. Microsc. **186** (1997), 93 – 107.
- [ER66] Echarte Reula, J. *Medidas en espacios foliados y en espacios homogéneos*, Publ. Rev. Acad. Ci. Zaragoza, 21, (1966).
- [GT59] Gaeta, F. *Algunas observaciones sobre la realización efectiva del programa de Chern para la Geometría Integral*, Math. Notae **17** (1959), 1 - 29.
- [GT60] Gaeta, F. *Sobre un proceso de linealización aplicable en problemas de Geometría Integral*, U. Nac. La Plata. Publ. Fac. Cienc. Fís. **6** (1960)., 17 –32.
- [G84] Gallego, E. *Solución a la conjetura de Santaló sobre convexos en el plano hiperbólico*, Tesina, Publ. Dep. Mat. UAB, (1984).

- [GR88] Gallego, E. & Reventós A. *Curvature and plane fields*, C. R. Acad. Sc. París **306** (1988), 675 – 679.
- [GNS] Gallego, E. , Naveira, A. M. and Solanes, G. *Horospheres and convex bodies in the n -dimensional hyperbolic space*, (preprint).
- [GACO96a] Gual-Arnau, X. & Cruz-Orive, L. M. *Consistency in systematic sampling for stereology*, Adv. Appl. Prob. (Section: Stochastic Geometry) **28** (1996), 329 – 330.
- [GACO96b] Gual-Arnau, X. and Cruz-Orive, L. *Consistency in systematic sampling*, Adv. Appl. Prob. (Section Stochastic Geometry) **28** (1996), 982 – 993.
- [GAN97] Gual – Arnau, X. , Naveira, A. M. & Tarrío, A. *An introduction to Integral Geometry in the n -dimensional quaternionic space.*, Proc. 3rd Int. Workshop Diff. Geom. and Appl. Sibiu **5** (1997), 175 – 181.
- [GANT00] Gual – Arnau, X. & Naveira, A. M & Tarrío, A. *Integral Geometry in Euclidean and Projective quaternionic spaces*, Bull. Sc. Math. Roumanie **43** (93) (2000), 267 – 277.
- [GANB01] Gual-Arnau, X. and Nuño-Ballesteros, J. J. *A stereological version of the Gauss–Bonnet Formula*, Geom. Dedicata **84** (2001), 253 – 260.
- [Gn86] Gysin, L. M. *Inequalities for the product of the partition determined in a convex body by a surface*, Rend. Circ. Mat. Palermo **35** (1986), 420-428.
- [Gn90] Gysin, L. M. *An inequality for closed curves in surfaces with constant curvature*, Rev. Un. Mat. Argentina **36** (1990), 95-100.
- [Gn93] Gysin, L. M. *The isoperimetric inequality for non simple closed curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 197-203.
- [HC] Hernández Cifre, M.A. *Optimizing the perimeter and the area of convex sets with fixed diameter and circumradius*, aceptado para su publicación en Arch. Mat. (Basel).
- [HCSG98a] Hernández Cifre, M. A. & Segura Gomis, S. *Some inequalities for planar convex sets containing one lattice point*, Bull. Austral. Math. Soc. **58** (1998), 159 – 166.
- [HC01] Hernández-Cifre, María A. *Area-inradius and diameter-inradius relations for covering plane sets*. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **44** (2001), 95—105
- [HCSaS01] Hernández Cifre, María A.; Salinas, Guillermo; Segura Gómis, Salvador *Complete systems of inequalities*. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **2** (2001), Article 10, 12 pp. (electronic). 52A40
- [HCPSaS03] Hernández Cifre, M. A. Pastor, J. A., Salinas Martínez, G. & Segura Gomis, S. *Complete systems of inequalities for centrally symmetric convex sets in the n -dimensional space. (Englishsummary)* Arch. Inequal. Appl. **1** (2003), 155--167.
- [HCSG00] Hernández Cifre, M. A. & Segura Gomis, S. *The missing boundaries of the Santaló Diagrams for the cases (d, w, R) and (w, R, r)* . Disc. Comp. Geom. **23** (2000), 381-388.
- [HCSG98b] Hernández Cifre, M. A. & Segura Gomis, S. *Some area - diameter inequalities for two dimensional lattices*, Geom. Dedicata **72** (1998), 325 – 330.

- [HCS98] Hernández Cifre, M. A. & Scott, P. R. *A isodiametric problem with lattice point constraints*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 289 – 294.
- [HCSSG01] Hernández Cifre, M. A., Salinas, G. & Segura – Gomis, S. *Complete systems of inequalities*, J. Ines. Pure Appl. Math. 2, Art. 10, (2001).
- [HCSSG02] Hernández Cifre, M. A. , Salinas, G. & Segura - Gomis S. *Complete systems of inequalities for centrally symmetric polar convex sets*, Intern. Math. J. **2** (2002), 39 – 49.
- [Kr82/83] Keilhauer, G. *Estimating some geometric objects related to horospheres* , Rev. Un. Mat. Argentina **30** (1982/83), 174/181.
- [Kr85] Keilhauer, G. *On the space of Riemannian horospheres*, Rev. Un. Mat. Argentina **32** (1985), 48-57.
- [Mr84/86] Molter, U. *Tangent measures over convex bodies in E^3* , Math. Notae **31** (1984/86), 81-97.
- [Mr86] Molter, U. *Tangential measure on the set of convex infinite cylinders*, J. Appl. Probab. **23** (1986), 961-972.
- [N69] Naveira, A. M. *Note sur des volumes en espaces de Riemann fibrés*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1969), 275 – 280.
- [NSG85] Naveira, A. M. & Segura Gomis, S. *The isoperimetric inequality and the geodesic spheres. Some geometrical consequences*, Lecture Notes in Math. **1209** (1985), 235 – 242.
- [NSG89] Naveira, A. M. & Segura Gomis S. *Some remarks about the isoperimetric problem*, Differential geometry and its applications (Dubrovnik, 1988), 243 – 252, Univ. Novi Sad, (1989).
- [NSG90] Naveira, A. M. & Segura Gomis, S. *Some isoperimetric inequalities for the space forms*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (1990), 249 – 259.
- [NG91] Naveira, A. M. & García, F. *Some general remarks about real and complex integral geometry*, Proceedings of the 3rd Congress of Geometry (Thessaloniki, 1991), 306 - 318, Aristotle Univ. Thessaloniki, Thessaloniki, (1992).
- [N94] Naveira, A. M. *On the Total (non absolute) curvature of an even dimensional submanifold X^n immersed in $\mathbf{R}^{n+2}$* , Rev. Mat. Complut. **7** (1994), 279 – 287.
- [N-T97] Naveira, A. M. & Tarrío, A. *Two problems on h-convex sets in the hyperbolic space*. Arch. Math. (Bassel) **68** (1997), 514—519.
- [NT95] Naveira, A. M. & Tarrío A. *Some results about integral geometry in the 3 and 4 - dimensional hyperbolic spaces*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. **3** (1995), 71 – 82.
- [NT00] Naveira, A. M. & Tarrío A. *Some properties of integral Geometry of generalized flag manifolds*, Supl. Rend. Circ. Mat. Palermo **65** (2000), 233 – 246.
- [NM00] Naveira, A. M. & Masó R. *A note about some algebraic relations among the cross-sectional measures of convex bodies in R^n* , Bull. Sc. Math. Roumanie **43** (93) (2000), 299 – 301.
- [SSR56] Sancho de San Román, J. *Twisted curves with constant affine width*, Coll. Math. **8** (1956), 85 – 98.

- [SSR63a] Sancho de San Román, J. *A new concept of affine breadth of oval bodies*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat (España) **51** (1957), 229 - 244.
- [SSR63b] Sancho de San Román, J. *On an affine width of closed convex sets*, Col. Int. Geom. Dif., Santiago (1963), 53 – 62.
- [SSR64] Sancho de San Román, J. *Relatively invariant measures on homogeneous spaces and applications to integral geometry*, R. A. M. E., Valencia, (1964), 103 – 108.
- [SSR67] Sancho de San Román, J. *On the existence of relatively invariant measures in a Klein space*, Acta Cient. Compostelana, **4** (1967), 159 – 164.
- [SSR69] Sancho de San Román, J. *Sur les conditions d'existence de mesure relativement invariante dans un espace de Klein*, Proc. In honour of Iñiguez y Almech. C. S. I. C. Zaragoza, (1969), 191 – 194.
- [Ss05] Solanes, G. *Integral Geometry and the Gauss-Bonnet Theorem in constant curvature spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2005), 1105-1115.
- [MC-ORHG-A00] Spark, V., Cruz-Orive, L., Roberts, N., Holmes, C. & Gual-Arnau X. *Estimation of brain compartment volume from MR Cavalieri slices*, J. of Comput. Assist. **24** (2000), 466 – 477.
- [VA50] Vidal-Abascal, E. *Sobre fórmulas de Steiner para el área de una elipse*, Rev. Geofísica, Madrid **2** (1947), 425 – 431.
- [VA50] Vidal-Abascal, E. *Geometría Integral sobre las superficies curvas*, Publ. Obs. Astr. Santiago, (1950).
- [VAR52] Vidal-Abascal, E. and Rodeja E. G. *Notes on curves on surfaces of constant curvature*, Collect. Math. **5** (1952), 331 – 337.
- [VA53] Vidal-Abascal, E. *Sobre los fundamentos de la Geometría Integral*, Mem. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat (España) **4** (1953).
- [VA60] Vidal-Abascal, E. *Generalization of integral invariants to integral geometry in Klein and Riemann spaces*, Collect. Math. **12** (1960), 71 – 102.
- [VA61] Vidal-Abascal, E. *On the extremal manifold of a multiple integral and generalized integral invariants*, Actas de la I. RAME (1961), 141 – 149. Universidad de Madrid, Madrid.
- [VA62] Vidal-Abascal, E. *New proof of the Steiner formulae in a general S^{n+1}* , Collect. Math. **14** (1962), 47 – 50.
- [VA80] Vidal-Abascal, E. *On the duality between the Gauss – Bonnet theorem and the integral of geodesics which intersect a curve on a surface*, Collect. Math. **31** (1980), 113 – 123.